Informatica teorica
Compitino del 13 maggio 2015
Bozza di soluzioni

Esercizio 1)

$$(3, \{(4,100,7,11); (15,175,44,2); (337,7,21,100); (40,2,8,104)\}) \xrightarrow{f} (7,8,21,44)$$

1.1) L'input di f è una coppia, quindi il dominio è un prodotto cartesiano.
Il primo componente viene da $\mathbb{N}$.
Il secondo componente è un insieme finito di n-uple, ovvero un sottoinsieme di F (insieme di tutte le n-uple di naturali, al variare di n), ovvero un elemento di $\mathcal{P}(F)$ (insieme delle parti di F).
Quindi, il dominio di f può essere $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(F)$

1.2) L'output di f è una n-upla, quindi un suo codominio può essere F.

$$f: \mathbb{N} \times \mathcal{P}(F) \longrightarrow F$$

1.3) Dato che $\mathcal{P}(F)$ include anche sottoinsiemi infiniti di F, dato il dominio $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(F)$, f è parziale perché non definita se il secondo componente dell'input è infinito.
Inoltre, f non è definita nemmeno per i valori del primo componente dell'input che non trovano corrispondenza posizionale nel secondo componente, come ad esempio

$$(5, \{(1,1,1); (30,750,44)\}) \xmapsto{f} \perp$$

1.4) Con F come codominio, f non è suriettiva a causa dell'ordinamento dei numeri nei suoi output. Infatti

$$\nexists x \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(F) : f(x) = (4,3,1,5)$$ ad esempio.

1.5) f non è iniettiva, perché ad esempio

$$f(1, \{(10,4,3); (5,70,1)\}) = f(2, \{(0,5); (883,10)\}) = (5,10)$$

1.6) f è computabile perché si ottiene l'output come risultato di un algoritmo, come segue:

1) controllo che tutte le n-uple abbiano la stessa dimensione maggiore o uguale a z (il primo componente dell'input)
2) estraggo lo z-esimo componente di ciascuna n-upla e costruisco una x-upla
3) applico un qualunque algoritmo di ordinamento (selection sort, ad esempio)

L'algoritmo può non terminare a causa dei seguenti problemi:
- le n-uple non sono finite (ossia X non è finito)
- non è possibile estrarre lo z-esimo componente perché non esiste.

In tal caso si ha la controparte computazionale del fatto che $f(x) = \perp$

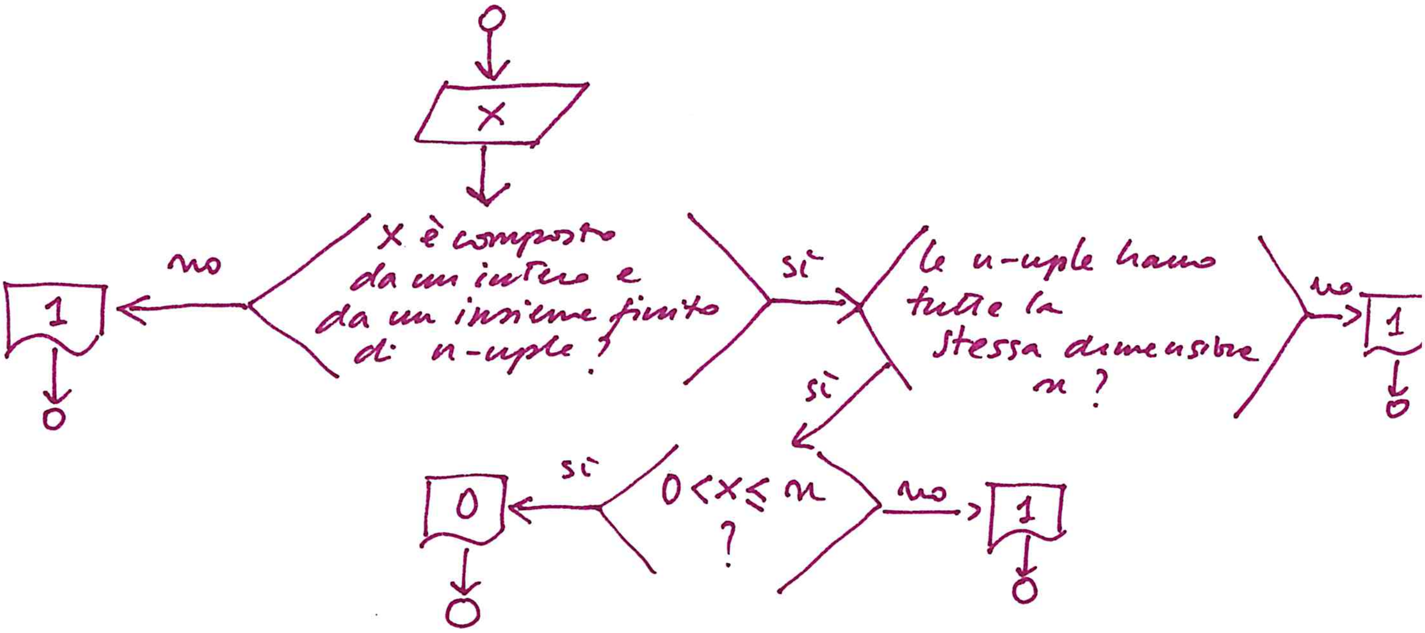
1.7) Il rango di f è un sottoinsieme del codominio, ossia di F. Tale sottoinsieme è infinito (basti pensare che include le infinite 1-uple (k) con $k \in \mathbb{N}$).
Un insieme infinito che è sottoinsieme di un insieme (F) con cardinalità $\aleph_0$ ha necessariamente cardinalità $\aleph_0$.

1.8) Il C.E. di f è un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(F)$.
$\mathbb{N}$ ha cardinalità $\aleph_0$ mentre $\mathcal{P}(F)$ ha cardinalità $\aleph_1$ (per il teorema di Cantor e per il fatto che F ha cardinalità $\aleph_0$).
Dobbiamo restringere il contesto:
il C.E. sicuramente esclude gli elementi di $\mathcal{P}(F)$ che sono infiniti, quindi possiamo dire che C.E. è un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times [\mathcal{P}(F)]^*$, dove $[\mathcal{P}(F)]^*$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di F.
Gli elementi di $[\mathcal{P}(F)]^*$ possono essere ordinati tramite la stessa codifica usata per F, con la sola accortezza di usare non solo lo "0" come separatore tra un numero e il successivo all'interno di una n-upla, ma anche lo "00" come separatore tra una n-upla e la successiva.
In realtà gli elementi di $[\mathcal{P}(F)]^*$ sono insiemi, quindi l'ordine con cui si elencano gli elementi di tali insiemi non dovrebbe contare, ma non importa in questo caso perché anche introducendo questa restrizione che potenzialmente aumenta il numero di elementi dell'insieme, abbiamo che la cardinalità è $\aleph_0$

Dato che il C.C. di f è un sottoinsieme infinito dell'insieme $\mathbb{N} \times [P(F)]^*$ che è il prodotto cartesiano di due insiemi con cardinalità $\aleph_0$, anch'esso ha cardinalità $\aleph_0$.

1.9) Cfr. appunti e testo di riferimento

1.10)



Esercizio 2)

2.1
2.2 } Cfr. appunti e testo di riferimento
2.3

2.4) Non sempre.
Se A è enumerabile, vuol dire che A è il rango di una funzione computabile totale. In una situazione in cui tale funzione è programmata su un calcolatore a cui abbiamo solo accesso parziale (ovvero possiamo inserire input e osservare l'output, ma non possiamo osservare il codice ìi funzione), dato un elemento x e la domanda "x∈A ?", siamo in grado di rispondere solo in caso positivo.

Esercizio 3)

Controllo di z (e sua cancellazione), se $z \neq 0$ e $z \neq 1$ va in loop

q_1 | | D q_{gotoz}
q_{gotoz} | | D q_{gotoz}
q_{gotoz} S_0 S_0 D q_{gotoz1}
q_{gotoz1} | | D q_{gotoz1}
q_{gotoz1} S_0 S_0 D q_{checkz}
q_{checkz} | S_0 D $q_{z=0?}$
$q_{z=0?}$ | S_0 D $q_{z=1?}$
$q_{z=0?}$ S_0 S_0 S $q_{z=0}$
$q_{z=1?}$ S_0 S_0 S $q_{z=1}$
$q_{z=1?}$ | | D q_{loop}

$z=0$: x e y vanno sommati. La seconda barra viene tolta dalla parte sinistra di x nel caso $y=0$.

$q_{z=0}$ S_0 S_0 S $q_{z=0}$
$q_{z=0}$ | S_0 S $q_{1\text{-elim}}$
$q_{1\text{-elim}}$ | | S $q_{1\text{-elim}}$
$q_{1\text{-elim}}$ S_0 | S $q_{11\text{-elim}}$
$q_{11\text{-elim}}$ | | S $q_{11\text{-elim}}$
$q_{11\text{-elim}}$ S_0 S_0 D q_{quasi}
q_{quasi} | S_0 C q_0

$z=1$: y va sottratto da x. Se le barre di x finiscono prima va in loop

$q_{z=1}$ S_0 S_0 S $q_{z=1}$
$q_{z=1}$ | S_0 S q_{y--}
q_{y--} | | S q_{y--}
q_{y--} S_0 S_0 S $q_{x?}$
$q_{x?}$ S_0 S_0 D q_{loop}
$q_{x?}$ | | S q_{sinx}
q_{sinx} | | S q_{sinx}

q_{sinx} S_0 S_0 D q_{x--}
q_{x--} | S_0 D q_{jumpx}
q_{jumpx} | | D q_{jumpx}
q_{jumpx} S_0 S_0 D $q_{y?}$
$q_{y?}$ S_0 S_0 S $q_{1\text{-add}}$
$q_{y?}$ | | D q_{desy}
q_{desy} | | D q_{desy}

q_{desy} S_0 S_0 S $q_{z=1}$
q_{loop} S_0 S_0 D q_{loop}
q_{loop} | | D q_{loop}
$q_{1\text{-add}}$ S_0 | C q_0